Научная статья
УДК 517.5
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-62-86

ШАРОВЫЕ СРЕДНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СВЁРТКИ БЕССЕЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Глеб Витальевич Краснощёких[1]
Виталий Владимирович Волчков[2]

[1,2] Донецкий государственный университет, г. Донецк, Россия,

[1]wolverimred@mail.ru
[2]volna936@gmail.com

Аннотация

Пусть $\alpha \in (-1/2, +\infty)$, χ_r – индикатор отрезка $[-r, r]$. В работе получены новые теоремы о двух радиусах для оператора свертки Бесселя $f \to f \overset{\alpha}{\star} \chi_r$, связанные с квазианалитическими классами функций. Установлен также локальный аналог теоремы о двух радиусах для функций f, удовлетворяющих системе свёрточных неравенств $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_1} \geq 0$, $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_2} \leq 0$. Показаны приложения этих результатов к теоремам единственности для решений задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и теоремам о замыкании обобщенных сдвигов.

Ключевые слова и фразы

обобщенный сдвиг, преобразование Фурье-Бесселя, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, теоремы о двух радиусах.

Источник финансирования

Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124012400352-6).

Для цитирования

Краснощеких Г. В., Волчков Вит. В. Шаровые средние относительно свёртки Бесселя и их применение // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 2, С. 62-86. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-62-86

© Краснощеких Г. В., Волчков Вит. В., 2025

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86

Ball averages relative to the Bessel convolution and their application

Gleb V. Krasnoschekikh[1], **Vitaliy V. Volchkov**[2],

[1,2]Donetsk State University, Donetsk, Russia

[1]wolverimred@mail.ru
[2]volna936@gmail.com

Abstract

Let $\alpha \in (-1/2, +\infty)$ and χ_r be the indicator function of the segment $[-r, r]$. New two-radii theorems have been obtained for the Bessel convolution operator $f \to f \overset{\alpha}{\star} \chi_r$ related to quasi-analytic classes of functions. A local analogue of the two-radii theorem has also been established for functions f that satisfy the system of convolutional inequalities $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_1} \geq 0$, $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_2} \leq 0$. Applications of these results to the uniqueness theorems for solutions of the Cauchy problem for the generalized Euler-Poisson-Darboux equation and closure theorems for generalized shifts are presented.

Keywords

generalized shift, Fourier-Bessel transform, Euler-Poisson-Darboux equation, two-radii theorems.

Funding

The research was carried out within the framework of a state assignment from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic № 124012400352-6).

For citation

Krasnoschekikh G. V., Volchkov Vit. V., Ball averages relative to the Bessel convolution and their application // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N 2, P. 62-86. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-62-86

§ 1. Введение и постановка задачи

Пусть α – фиксированное число из промежутка $(-1/2, +\infty)$, $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ — класс чётных локально суммируемых по мере $d\mu_\alpha(x) = |x|^{2\alpha+1}dx$ функций на промежутке $I_R = (-R, R)$, $f \overset{\alpha}{\star} g$ — свёртка Бесселя порядка α функции $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ и чётного распределения g на $\mathbb{R}$ с носителем на I_R (см. § 2 ниже). Оператор вида

$$f \to f \overset{\alpha}{\star} \chi_r, \quad f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R), \quad 0 < r < R, \tag{1}$$

где χ_r — индикатор отрезка $[-r,r]$, будем называть оператором шарового среднего значения относительно свёртки Бесселя. Одной из мотиваций такого определения является легко проверяемая формула

$$\int_{|\mathbf{y}|<r} F(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Bigl(f \overset{\frac{n}{2}-1}{\star} \chi_r\Bigr)\bigl(|\mathbf{x}|\bigr), \quad |\mathbf{x}|<R-r,$$

где Γ — гамма-функция, $F(\mathbf{x}) = f\bigl(|\mathbf{x}|\bigr)$ — радиальная локально суммируемая функция на шаре $|\mathbf{x}|<R$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$. Кроме того, интеграл в левой части указанного равенства является обычной сверткой в $\mathbb{R}^n$ функции F с индикатором шара $|\mathbf{x}|<r$. Отметим также, что $f\overset{\alpha}{\star}\chi_r$ выражается в терминах весового сферического среднего, порожденного обобщенным сдвигом Бесселя (см., например, [1, формула (13)] и формулу (5) ниже).

Изучение шаровых (сферических) средних относительно свёртки Бесселя и её обобщений представляет интерес в связи с развитием гармонического анализа на гипергруппах и возможными новыми приложениями в теории уравнений с частными производными, теории лакунарных рядов по специальным функциям, теории аппроксимации и задачах интерполяции целыми функциями (см. [1]–[4], [5, часть 5]).

Пусть $C^k_\natural(I_R)$ — множество всех чётных k раз непрерывно дифференцируемых функций на I_R, E_α — множество всевозможных отношений положительных нулей функции Бесселя $J_{\alpha+1}$. Одним из основных результатов работы [6] является следующая локальная теорема о двух радиусах для шаровых средних относительно свёртки Бесселя.

Теорема A. *Пусть $r_2>r_1>0$, $R>r_1+r_2$. Тогда для того чтобы*

$$\Bigl\{f\in C^\infty_\natural(I_R) : f\overset{\alpha}{\star}\chi_{r_j}=0 \text{ на } I_{R-r_j},\ j=1,2\Bigr\}=\{0\},$$

необходимо и достаточно, чтобы $r_1/r_2\notin E_\alpha$.

Утверждения такого типа восходят к Дельсарту [7], Зальцману [8], Смиту [9] и тесно примыкают к вопросам инъективности преобразования Помпейю и проблемам спектрального анализа-синтеза. Детальный обзор результатов по проблемам типа Помпейю содержится в [10]–[14]. В частности, были получены аналоги теоремы A для римановых симметрических пространств [14, часть 2, гл. 2], [15], группы Гейзенберга [13, с. 645] и пространств Деймека-Риччи [16].

Исключительное множество E_α в теореме A является счётным и всюду плотным на $(0,+\infty)$ (см. например, [5, часть 2, гл. 1, § 1.4]). В предельном случае $\alpha = -1/2$ оно совпадает с множеством всех положительных рациональных чисел. При этом теорема A (для $R = \infty$) соответствует классическому факту об отсутствии двух несоизмеримых периодов у непостоянной непрерывной функции на $\mathbb{R}$.

Доказательство теоремы A, предложенное в [6], опиралось на идеи К.А. Беренстейна и Р. Гэя из [17], и было связано с применением некоторого аналога аппроксимационной теоремы Хёрмандера. Недавние результаты об описании ядра оператора (1), установленные авторами в [18], дали возможность уточнить теорему A следующим образом.

Теорема B. *Пусть* $r_1, r_2 \in (0, +\infty)$, $\max\{r_1, r_2\} < R \leq +\infty$.

(i) Если $r_1/r_2 \notin E_\alpha$, $R \geq r_1 + r_2$, $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ *и*

$$f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_j} = 0 \quad \text{на} \quad I_{R-r_j}, \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

то $f = 0$.

(ii) Если $r_1/r_2 \in E_\alpha$ *или* $R < r_1 + r_2$, *то существует ненулевая функция* $f \in C^\infty_\natural(I_R)$, *удовлетворяющая* (2).

В данной работе мы продолжаем изучение функций с условиями вида (2) и их обобщениями. Дальнейшее исследование структуры ядра оператора (1) позволило получить новые свойства решений системы (2), связанные с квазианалитическими классами. Установлен также аналог теоремы A для функций f, удовлетворяющих системе свёрточных неравенств $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_1} \geq 0$, $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_2} \leq 0$. Кроме того, показаны приложения этих результатов к теоремам единственности для решений задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и теоремам о замыкании обобщенных сдвигов.

§ 2. Формулировки основных результатов

Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_+$ обозначаются соответственно множества всех натуральных, целых и неотрицательных целых чисел.

Пусть $\mathcal{D}_\natural(I_R)$ — совокупность всех функций класса $C^\infty_\natural(I_R)$ с компактным носителем. Множество $\mathcal{D}_\natural(I_R)$ является топологическим векторным пространством с обычной топологией. Обозначим через $\mathcal{D}'_\natural(I_R)$ пространство всех чётных распределений на I_R, т.е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}_\natural(I_R)$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'_\natural(I_R)$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}_\natural(I_R)$ будем записывать $\langle f, \varphi\rangle$. Пространство $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ вкладывается в $\mathcal{D}'_\natural(I_R)$, если для $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ и $\varphi \in \mathcal{D}_\natural(I_R)$ положить

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_0^R f(x)\varphi(x)\, d\mu_\alpha(x).$$

Пусть $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R})$ — множество всех распределений класса $\mathcal{D}'_\natural(\mathbb{R})$ с компактным носителем. Для $g \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R})$ положим

$$r(g) = \inf\{\rho > 0 : \operatorname{supp} g \subset \overline{I}_\rho\}$$

($\operatorname{supp} g$ — носитель распределения g, $\overline{I}_\rho = [-\rho, \rho]$). Если $f \in \mathcal{D}'_\natural(I_R)$ и $R > r(g)$, то свёртка Бесселя $f \overset{\alpha}{\star} g$ определяется как распределение из $\mathcal{D}'_\natural(I_{R-r(g)})$, действующее по правилу

$$\langle f \overset{\alpha}{\star} g, \varphi\rangle = \Big\langle f(x), \langle g(y), T_x^\alpha \varphi(y)\rangle\Big\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_\natural(I_{R-r(g)}),$$

где

$$T_x^\alpha \varphi(y) = c_\alpha \int_0^\pi \varphi\big(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}\big)(\sin\theta)^{2\alpha}\, d\theta, \tag{3}$$

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\big(\alpha + \frac{1}{2}\big)}.$$

Основные свойства этой свёртки содержатся в [2, гл. 1], [6, §§ 2, 3].

В случае, когда $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ и g — чётная комплексная мера Радона на $\mathbb{R}$ с носителем в $\overline{I}_{r(g)} \subset I_R$, имеем $f \overset{\alpha}{\star} g \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_{R-r(g)})$ и

$$(f \overset{\alpha}{\star} g)(y) = \int_0^{r(g)} \big(T_y^\alpha f\big)(x)\, dg(x), \quad y \in I_{R-r(g)}. \tag{4}$$

При этом, если $g \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(\mathbb{R})$ и $r(g) < R$, то

$$(f \overset{\alpha}{\star} g)(y) = \int_0^{r(g)} \big(T_y^\alpha f\big)(x) g(x)\, d\mu_\alpha(x), \quad y \in I_{R-r(g)}. \tag{5}$$

Отметим также, что оператор $f \to f \overset{\alpha}{\star} g$ коммутирует с дифференциальным оператором Бесселя

$$L_\alpha = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x}\frac{d}{dx},$$

т.е.

$$L_\alpha(f \overset{\alpha}{\star} g) = (L_\alpha f) \overset{\alpha}{\star} g = f \overset{\alpha}{\star} (L_\alpha g) \quad \text{на} \quad I_{R-r(g)}. \tag{6}$$

Для $0 < r < R$ определим классы $V_r(I_R)$ и $V_r^\infty(I_R)$ равенствами

$$V_r(I_R) = \{f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R) : f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0 \text{ на } I_{R-r}\}, \quad V_r^\infty(I_R) = V_r(I_R) \cap C^\infty(I_R).$$

Положим

$$V_{r_1,r_2}(I_R) = V_{r_1}(I_R) \cap V_{r_2}(I_R),$$
$$V^\infty_{r_1,r_2}(I_R) = V^\infty_{r_1}(I_R) \cap V^\infty_{r_2}(I_R), \quad r_1, r_2 \in (0, R).$$

Теоремы 1 и 2 ниже являются аналогами теоремы A для квазианалитических классов функций типа Данжуа-Карлемана (см. [19] и § 3 ниже).

Теорема 1. *Пусть* $0 < r_1 < r_2 < R$.

(i) Предположим, что $r_1/r_2 \notin E_\alpha$, $f \in V^\infty_{r_1,r_2}(I_R)$ *и существует последовательность положительных чисел* $\{M_n\}_{n=1}^\infty$, *такая что*

$$\sup_{x\in I_{r_1}} \left|L_\alpha^n f(x)\right| \le M_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\inf\limits_{n\ge k} M_n^{1/2n}} = +\infty. \tag{8}$$

Тогда $f = 0$ *на* I_R.

(ii) Если $R < r_1 + r_2$ *и* $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ *— произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\inf\limits_{n\ge k} M_n^{1/2n}} < +\infty, \tag{9}$$

то существует ненулевая функция $f \in V^\infty_{r_1,r_2}(I_R)$, *для которой*

$$\sup_{x\in I_R} \left|L_\alpha^n f(x)\right| \le M_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Из второго утверждения теоремы 1 видно, что условие (8) в утверждении (i) ослабить нельзя. Нетрудно убедиться также (см. § 4 ниже), что первое утверждение теоремы 1 станет, вообще говоря, неверным, если в оценке (7) заменить I_{r_1} на любой меньший промежуток $I_{r_1-\varepsilon}$. Кроме того, условие $r_1/r_2 \notin E_\alpha$ в утверждении (i) убрать нельзя, как показывает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $0 < r_1 < r_2 < R \le +\infty$, $r_1/r_2 \in E_\alpha$ *и* $\mu = \min \mathcal{Z}_{r_1} \cap \mathcal{Z}_{r_2}$, *где*

$$\mathcal{Z}_{r_j} = \{\lambda > 0 : J_{\alpha+1}(\lambda r_j) = 0\}, \quad j = 1, 2.$$

(i) Предположим, что $f \in V^\infty_{r_1,r_2}(I_R)$,

$$\varliminf_{n\to\infty} \sup_{x\in I_\varepsilon} \mu^{-2n}\left|L_\alpha^n f(x)\right| = 0 \text{ при некотором } \varepsilon \in (0, R), \tag{10}$$

и существует последовательность положительных чисел $\{M_n\}_{n=1}^\infty$, *удовлетворяющая условиям* (7) *и* (8). *Тогда* $f = 0$ *на* I_R.

(ii) Существует ненулевая функция $f \in V^\infty_{r_1,r_2}(I_R)$, *такая что*

$$\sup_{x\in I_R} \left|L_\alpha^n f(x)\right| \le \mu^{2n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Следующее свойство функций класса $V_{r_1,r_2}(I_R)$ связано с так называемой (I)-квазианалитичностью (см., например, [20, лекция 3]).

Теорема 3. *Пусть $r_1 \neq r_2$, $R > r_1+r_2$ и $f \in V_{r_1,r_2}(I_R)$. Тогда если $f = 0$ на I_ε при некотором $\varepsilon \in (0, R)$, то $f = 0$ на I_R.*

Отметим, что для любых $r > 0$, $\varepsilon \in (0, r/2)$ существует ненулевая функция $f \in V^{\infty}_{r,r+\varepsilon}(I_{2r-\varepsilon})$, равная нулю на $I_{\varepsilon/2}$ (см. § 4 ниже). Поэтому требование на R в теореме 3 нельзя существенно ослабить.

Нашим заключительным результатом в этом разделе является аналог теоремы A для функций f, удовлетворяющих условию знакопостоянства свёрток из (2).

Обозначим через $L_{\natural,\alpha}(I_R)$ класс чётных функций на I_R, суммируемых по мере $d\mu_\alpha$.

Теорема 4. *Пусть $r_1, r_2 \in (0, +\infty)$, $R \geq r_1 + r_2$. Предположим, что $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$, и $f \in L_{\natural,\alpha}(I_{r_1+r_2})$ в случае $R = r_1 + r_2$. Тогда если*

$$f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_1} \geq 0 \ \text{ на } \ I_{R-r_1} \ \text{ и } \ f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_2} \leq 0 \ \text{ на } \ I_{R-r_2}, \tag{11}$$

то $f \in V_{r_1,r_2}(I_R)$. В частности, если $r_1/r_2 \notin E_\alpha$, то при выполнении указанных условий $f = 0$.

Относительно некоторых версий теорем 1, 2 и 4 для двухточечно - однородных пространств см. [5, часть 2, гл. 1], [14, часть 2, гл. 7]. Справедливость теорем 1–4 будет установлена в § 4 ниже. В § 3 приводятся вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Приведём сначала необходимую нам версию критерия квазианалитичности (см. [19, гл. 1]).

Пусть $A = \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, $C_A[a, b]$ — множество всех бесконечно дифференцируемых на $[a, b]$ функций f, удовлетворяющих условиям

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq c h^n A_n, \quad x \in [a, b], \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где постоянные $c = c(f) > 0$ и $h = h(f) > 0$ не зависят от n и x. Класс $C_A[a, b]$ называется квазианалитическим, если всякая функция $f \in C_A[a, b]$ определяется единственным образом по последовательности чисел $\left\{f^{(n)}(x_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$, где x_0 — произвольно заданная точка из $[a, b]$. Различные

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86

модификации понятия квазианалитичности содержатся в [21], [5, часть 1, гл. 2], [13, часть 1, гл. 1].

Следующий результат Данжуа-Карлемана даёт решение проблемы Адамара об описании последовательностей $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, для которых $C_A[a,b]$ является квазианалитическим классом.

Лемма 1. *Класс $C_A[a,b]$ квазианалитичен лишь в том случае, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\inf\limits_{n\geq k} A_n^{1/n}} = +\infty.$$

Далее, нетрудно видеть, что если $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty, \quad \text{то} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{1+\frac{c}{n}}} = +\infty$$

(см. [5, часть 1, гл. 2, лемма 2.1]). Отсюда получается следующее утверждение (см. [13, лемма 8.1]).

Лемма 2. *Пусть $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности положительных чисел, такие, что при некоторых $c > 0$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ выполнено условие*

$$m_n \leq c^n(1 + M_{n+l}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\inf\limits_{n\geq k} M_n^{1/n}} = +\infty, \quad \text{то} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\inf\limits_{n\geq k} m_n^{1/n}} = +\infty.$$

Отметим также, что если

$$\{m_n\}_{n=1}^{\infty} = \{M_1, M_1, M_2, M_2, M_3, M_3, \ldots\}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\inf\limits_{n\geq k} M_n^{1/2n}} = +\infty, \quad \text{то} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\inf\limits_{n\geq k} m_n^{1/n}} = +\infty. \tag{12}$$

Пусть

$$\varphi_{\lambda,\alpha}(x) = 2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)J_{\alpha}(\lambda x)(\lambda x)^{-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция $\varphi_{\lambda,\alpha}$ является собственной функцией оператора L_{α}, причем

$$L_{\alpha}\varphi_{\lambda,\alpha} = -\lambda^2\varphi_{\lambda,\alpha} \tag{13}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86

(см. [6, § 2]). Кроме того,

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^n \varphi_{\lambda,\alpha}(x)\right| \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\big((n+1)/2\big)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+n/2+1)}\lambda^n \tag{14}$$

при $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. [18, лемма 6]).

Преобразование Ганкеля распределения $f \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \widetilde{f}(\lambda) = \langle f, \varphi_{\lambda,\alpha}\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{15}$$

Если $f \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R})$, то справедлива формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{\big(2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\big)^2}\int_0^\infty \widetilde{f}(\lambda)\varphi_{\lambda,\alpha}(x)\,d\mu_\alpha(\lambda), \quad x \in \mathbb{R} \tag{16}$$

(см. [6, § 2]). Кроме того, для любого полинома p имеем

$$\mathcal{F}\big(p(L_\alpha)f\big)(\lambda) = p(-\lambda^2)\widetilde{f}(\lambda). \tag{17}$$

Лемма 3 ([6])**.** *Чётная целая функция w является преобразованием Ганкеля финитной функции класса $C^\infty_\natural(\mathbb{R})$ с носителем на $\overline{I}_r$ тогда и только тогда, когда для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существует константа $c_N > 0$, такая что*

$$|w(z)| \leq c_N \frac{e^{r|\operatorname{Im} z|}}{(1+|z|)^N}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 4 ([18])**.** *Пусть $f \in \mathcal{D}'_\natural(I_R)$ и $L_\alpha f = -\lambda^2 f$ на I_R при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Предположим, что $g \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R})$ и $r(g) < R$. Тогда*

$$f \overset{\alpha}{\star} g = \widetilde{g}(\lambda)f \quad \text{на} \quad I_{R-r(g)}. \tag{18}$$

В частности,

$$\varphi_{\lambda,\alpha} \overset{\alpha}{\star} \chi_r = \frac{r^{2\alpha+2}\varphi_{\lambda,\alpha+1}(r)}{2\alpha+2}\varphi_{\lambda,\alpha}. \tag{19}$$

Обозначим через $\mathcal{Z}(w)$ множество всех нулей целой функции w.

Лемма 5 ([6])**.** *Пусть $v_1, v_2 \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R})$ и $\mathcal{Z}(\widetilde{v}_1) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{v}_2) = \varnothing$. Тогда*

$$\big\{f \in C^\infty_\natural(\mathbb{R}) : f \overset{\alpha}{\star} v_1 = f \overset{\alpha}{\star} v_2 = 0\big\} = \{0\}.$$

Лемма 6. *Пусть g — ненулевая функция с компактным носителем класса $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(\mathbb{R})$ и $R \in (r(g), +\infty]$. Предположим, что $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$, $f \overset{\alpha}{\star} g = 0$ на $I_{R-r(g)}$ и $f = 0$ на $I_{r(g)}$. Тогда $f = 0$ на I_R.*

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86

Доказательство. Если функция g является индикатором промежутка I_r, утверждение леммы получено в [18]. В общем случае доказательство проводится аналогично. □

Для $f \in L_{\natural,\alpha}(I_r)$, $\lambda \in \mathcal{Z}_r$ положим

$$c_\lambda(f,r) = \frac{2}{r^{2\alpha+2}\varphi^2_{\lambda,\alpha}(r)} \int_0^r f(x)\varphi_{\lambda,\alpha}(x)\,d\mu_\alpha(x).$$

Из асимптотики нулей бесселевой функции следует, что

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_r} \frac{1}{\lambda^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{20}$$

Лемма 7 ([18])**.** *(i) Для того чтобы $f \in V_r^\infty(I_R)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_r} c_\lambda(f,r)\varphi_{\lambda,\alpha}(x), \quad x \in I_R, \tag{21}$$

где ряд сходится в пространстве $C^\infty(I_R)$ и

$$c_\lambda(f,r) = O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right), \quad \lambda \to +\infty \tag{22}$$

для любого $N > 0$.

(ii) Пусть $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$. Тогда для того чтобы $f \in V_r(I_R)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение (21)*, в котором ряд сходится в пространстве $\mathcal{D}'_\natural(I_R)$ и*

$$c_\lambda(f,r) = O(\lambda^{2\alpha+1}), \quad \lambda \to +\infty. \tag{23}$$

Символами $C(\alpha)$, $C_1(\alpha)$, $C(\alpha,r_1)$ и т.д. будем обозначать положительные константы, зависящие от указанных параметров, в разных местах, вообще говоря, разные.

Лемма 8. *Пусть $f \in C^\infty_\natural(\overline{I}_{r_1})$. Предположим, что*

$$\left(L^s_\alpha f\right)'(r_1) = 0 \quad \text{при всех} \quad s \in \mathbb{Z}_+ \tag{24}$$

и $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность положительных чисел с условием (7)*. Тогда*

$$|c_\lambda(f,r_1)| \le C(\alpha,r_1)\frac{M_n}{\lambda^{2n-2\alpha-1}} \quad \text{для любых} \quad \lambda \in \mathcal{Z}_{r_1}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Доказательство. Из граничного условия в лемме следует равенство

$$c_\lambda(f,r_1)=\frac{2(-1)^n\lambda^{-2n}}{r_1^{2\alpha+2}\varphi_{\lambda,\alpha}^2(r_1)}\int_0^{r_1}\big(L_\alpha^n f\big)(x)\varphi_{\lambda,\alpha}(x)\,d\mu_\alpha(x) \tag{26}$$

(см. [18, формула (4.28)]). Используя асимптотику бесселевой функции на бесконечности, имеем

$$|\varphi_{\lambda,\alpha}(r_1)|>\frac{C(\alpha)}{(\lambda r_1)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\quad \text{при условии}\quad \lambda\in\mathcal{Z}_{r_1}$$

(см., например, [18, лемма 3]). Учитывая, что $|\varphi_{\lambda,\alpha}(x)|\le 1$ при $\lambda,x\in\mathbb{R}$ (см. (14)), отсюда и из (26) получаем (25). □

Лемма 9 ([18])**.** *Предположим, что $r_1\neq r_2$ и $\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2}$ является бесконечным. Пусть $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\}$ — последовательность всех элементов $\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2}$, занумерованная в порядке возрастания. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty}(\lambda_{m+1}-\lambda_m)=+\infty.$$

Лемма 10. *Пусть $r_1\neq r_2$, $\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2}\neq\varnothing$ и $\varepsilon>0$. Тогда:*

(i) существуют ненулевая функция $\varphi\in\mathcal{D}_\natural(I_\varepsilon)$, такая, что $\widetilde{\varphi}=0$ на $\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2}$;

(ii) для любого $\nu\in\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2}$ существует функция $\psi_\nu\in\mathcal{D}_\natural(I_\varepsilon)$, удовлетворяющая условию

$$\widetilde{\psi}_\nu(\lambda)=\begin{cases}0, & \text{если } \lambda\in\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2},\ \lambda\neq\nu\\ 1, & \text{если } \lambda=\nu.\end{cases}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 9 и леммы 15 в работе [18]. Далее, пусть k_ν — кратность нуля $\nu\in\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2}$ функции $\widetilde{\varphi}$, g — чётная целая функция, определяемая равенством

$$g(z)=\frac{\widetilde{\varphi}(z)}{(z^2-\nu^2)^{k_\nu}},\quad z\neq\pm\nu.$$

Тогда в силу леммы 3 функцию g можно представить в виде $g=\widetilde{h}$, где $h\in\mathcal{D}_\natural(I_\varepsilon)$. Полагая $\psi_\nu(x)=h(x)/g(\nu)$, получаем второе утверждение в лемме. □

Лемма 11. *Пусть $0<r_1<r_2<R$, $f\in V_{r_1,r_2}^\infty(I_R)$ и существует последовательность $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ с условиями (7) и (8). Тогда имеет место разложение*

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2}}c_\lambda(f,r_1)\varphi_{\lambda,\alpha}(x),\quad x\in I_R, \tag{27}$$

где коэффициенты $c_\lambda(f,r_1)$ удовлетворяют оценке (25).

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86

Доказательство. Справедливость оценки (25) установлена в лемме 8, поскольку функция $f \in V_{r_1}^{\infty}(I_R)$ удовлетворяет условию (24) (см. доказательство теоремы 1 в [18]). Определим функции $F, G \in C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{R})$ равенствами

$$F(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_{r_1}} c_\lambda(f, r_1)\varphi_{\lambda,\alpha}(x), \tag{28}$$

$$G(x) = \big(F \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_2}\big)(x) = \frac{r_2^{2\alpha+2}}{2\alpha+2} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_{r_1}} c_\lambda(f, r_1)\varphi_{\lambda,\alpha+1}(r_2)\varphi_{\lambda,\alpha}(x) \tag{29}$$

(см. (19), (25), (14) и (20)). Из леммы 7 и условия $f \in V_{r_2}(I_R)$ видно, что

$$f = F \quad \text{на} \quad I_R \tag{30}$$

и

$$G = 0 \quad \text{на} \quad I_{R-r_2}. \tag{31}$$

Покажем, что $G = 0$ на $\mathbb{R}$. Для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$G^{(N)}(x) = \frac{r_2^{2\alpha+2}}{2\alpha+2} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_{r_1}} c_\lambda(f, r_1)\varphi_{\lambda,\alpha+1}(r_2)\left(\frac{d}{dx}\right)^N \varphi_{\lambda,\alpha}(x).$$

Оценим $|G^{(N)}(x)|$ с помощью (25), (14), (20) и неравенства

$$\big|J_{\alpha+1}(x)\big| \le C_1(\alpha)\sqrt{x}, \quad x > 0$$

(см. [22, гл. 7, п. 7.12, формула (7); п. 7.13.1, формула (3)]). Полагая $l = [\alpha/2] + 2$, где $[\alpha/2]$ — целая часть числа $\alpha/2$, получаем

$$|G^{(N)}(x)| \le C_2(\alpha, r_1, r_2)m_N, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $m_0 = M_l$ и $m_{2n} = m_{2n-1} = M_{n+l}$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (8), (12) и лемм 1, 2 следует, что G принадлежит квазианалитическому классу функций на произвольном отрезке числовой оси. Поэтому $G = 0$ на $\mathbb{R}$ (см. (31)). Теперь используя (29) и соотношения ортогональности для бесселевых функций (см. [18, формула (4.23)]), приходим к равенствам

$$c_\lambda(f, r_1)\varphi_{\lambda,\alpha+1}(r_2) = 0, \quad \lambda \in \mathcal{Z}_{r_1}.$$

Это означает, что $c_\lambda(f, r_1) = 0$ при любом $\lambda \in \mathcal{Z}_{r_1} \setminus \mathcal{Z}_{r_2}$. Отсюда и из (30), (28) получаем требуемое утверждение. □

Обозначим через $\widehat{u}$ преобразование Фурье суммируемой функции u на $\mathbb{R}$, т.е.

$$\widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-ixy}\,dx.$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86

Лемма 12 ([13], лемма 19.2). *Пусть $\varepsilon > 0$, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию (9). Тогда существуют ненулевые функции $u_1, u_2 \in \mathcal{D}_{\natural}(I_\varepsilon)$, такие что $\mathcal{Z}(\widehat{u}_1) \cap \mathcal{Z}(\widehat{u}_2) = \varnothing$ и*

$$|\widehat{u}_1(z)| + |\widehat{u}_2(z)| \leq \frac{M_n}{\big(2+|z|\big)^{2n}} e^{\varepsilon|\operatorname{Im} z|} \quad \textit{при всех} \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 13. *Пусть $\varepsilon > 0$, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (9). Тогда существуют ненулевые функции $v_1, v_2 \in \mathcal{D}_{\natural}(I_\varepsilon)$, такие что $\mathcal{Z}(\widetilde{v}_1) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{v}_2) = \varnothing$ и*

$$\big|L_\alpha^n v_1(x)\big| + \big|L_\alpha^n v_2(x)\big| \leq M_n \quad \textit{для любых} \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Положим

$$m_1 = \ldots = m_{[\alpha]+3} = 1, \quad m_{n+[\alpha]+3} = C(\alpha) M_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$C(\alpha) = \big(2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\big)^2 \big(4 - 2\{\alpha\}\big) 2^{4-2\{\alpha\}}, \quad \{\alpha\} = \alpha - [\alpha].$$

Тогда (см. (9) и лемму 2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\inf\limits_{n \geq k} m_n^{1/2n}} < +\infty.$$

Поэтому в силу леммы 12 существуют ненулевые функции $u_1, u_2 \in \mathcal{D}_{\natural}(I_\varepsilon)$, такие что $\mathcal{Z}(\widehat{u}_1) \cap \mathcal{Z}(\widehat{u}_2) = \varnothing$ и

$$|\widehat{u}_1(z)| + |\widehat{u}_2(z)| \leq \frac{m_{n+[\alpha]+3}}{(2+|z|)^{2(n+[\alpha]+3)}} e^{\varepsilon|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Используя лемму 3, определим ненулевые функции $v_1, v_2 \in \mathcal{D}_{\natural}(I_\varepsilon)$ равенствами $\widetilde{v}_1 = \widehat{u}_1$, $\widetilde{v}_2 = \widehat{u}_2$. Ясно, что $\mathcal{Z}(\widetilde{v}_1) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{v}_2) = \varnothing$ и

$$|\widetilde{v}_1(\lambda)| + |\widetilde{v}_2(\lambda)| \leq \frac{C(\alpha) M_n}{(2+\lambda)^{2(n+[\alpha]+3)}}, \quad \lambda > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Далее (см. (16) и (17)),

$$L_\alpha^n v_j(x) = \frac{(-1)^n}{\big(2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\big)^2} \int_0^\infty \lambda^{2n} \widetilde{v}_j(\lambda) \varphi_{\lambda,\alpha}(x)\, d\mu_\alpha(\lambda),$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2.$$

Учитывая (14), отсюда и из (32) получаем

$$\left|L_\alpha^n v_1(x)\right| + \left|L_\alpha^n v_2(x)\right| \le \frac{C(\alpha)M_n}{\left(2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\right)^2}\int_0^\infty (2+\lambda)^{2\{\lambda\}-5}\,d\lambda = M_n.$$

Таким образом, функции v_1 и v_2 удовлетворяют всем требуемым условиям. $\square$

Лемма 14. *Пусть* $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$, $x > 0$, $\xi > 0$ *и* $x + \xi < R$. *Тогда*

$$\int_0^\xi \left|T_x^\alpha f(y)\right| d\mu_\alpha(y) \le \int_0^{x+\xi} \left|f(y)\right| d\mu_\alpha(y). \tag{33}$$

Доказательство. Сдвиг $T_x^\alpha f$ можно записать в виде

$$\gamma_\alpha (xy)^{2\alpha} T_x^\alpha f(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} t f(t) k_\alpha(t,x,y)\,du, \tag{34}$$

где $\gamma_\alpha = 2^{2\alpha-1}/c_\alpha$,

$$k_\alpha(t,x,y) = \left(y^2-(t-x)^2\right)^{\alpha-\frac12}\left((t+x)^2-y^2\right)^{\alpha-\frac12}$$

(см. (3)). Отсюда получаем

$$\int_0^\xi \left|T_x^\alpha f(y)\right| d\mu_\alpha(y) \le \frac{1}{\gamma_\alpha x^{2\alpha}}\int_0^\xi\int_{|x-y|}^{x+y} yt|f(t)|k_\alpha(t,x,y)\,dtdy \le$$

$$\le \frac{1}{\gamma_\alpha x^{2\alpha}}\int_0^{x+\xi} t|f(t)|\int_{|x-t|}^{x+t} yk_\alpha(t,x,y)\,dydt.$$

Используя эту оценку и равенства

$$\int_a^b y\left((y^2-a^2)(b^2-y^2)\right)^{\alpha-\frac12}dy = \frac{\Gamma^2\left(\alpha+\frac12\right)}{2\Gamma(2\alpha+1)}(b^2-a^2)^{2\alpha}, \tag{35}$$

$$2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\alpha+\frac12\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+1) \tag{36}$$

(см. [22, гл. 1, § 1.5.1, формула (13); § 1.2, формула (15)]), приходим к (33). $\square$

§ 4. Доказательства теорем 1-4

Доказательство теоремы 1. Используя лемму 11 и учитывая, что условие $r_1/r_2 \notin E_\alpha$ равносильно условию $\mathcal{Z}_{r_1} \cap \mathcal{Z}_{r_2} = \varnothing$, получаем первое утверждение теоремы 1.

Докажем второе утверждение. Фиксируем $\varepsilon \in \big(0, (r_1 + r_2 - R)/3\big)$. Поскольку $R + 2\varepsilon < r_1 + r_2$, то по теореме B существует ненулевая функция $\Phi \in V^\infty_{r_1,r_2}(I_{R+2\varepsilon})$. При этом $\Phi \not\equiv 0$ на I_{r_1} и для любого $a > 0$

$$c_\lambda(\Phi, r_1) = O\bigg(\frac{1}{\lambda^a}\bigg), \quad \lambda \to +\infty, \quad \lambda \in \mathcal{Z}_{r_1}$$

(см. лемму 6 и (22)). Положим

$$F(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_{r_1}} c_\lambda(\Phi, r_1)\varphi_{\lambda,\alpha}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда $F \in V^\infty_{r_1}(\mathbb{R})$, $F = \Phi$ на $I_{R+2\varepsilon}$ и

$$F \not\equiv 0 \ \text{ на } \ I_{r_1} \tag{37}$$

(см. (19), (14), (20) и лемму 7).

Далее, по лемме 13 существуют ненулевые функции $v_1, v_2 \in \mathcal{D}_\natural(I_\varepsilon)$, такие что $\mathcal{Z}(\widetilde{v}_1) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{v}_2) = \varnothing$ и

$$\big|L^n_\alpha v_1(x)\big| + \big|L^n_\alpha v_2(x)\big| \le M_n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из отсутствия общих нулей у $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$, леммы 5 и (37) следует, что $F \overset{\alpha}{\star} v_1$ или $F \overset{\alpha}{\star} v_2$ не является тождественным нулём на $\mathbb{R}$. Поэтому существует ненулевая функция $u \in \mathcal{D}_\natural(I_\varepsilon)$, такая что $F \overset{\alpha}{\star} u \not\equiv 0$ на $\mathbb{R}$ и

$$\big|L^n_\alpha u(x)\big| \le M_n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Как и выше (см. лемму 6), $F \overset{\alpha}{\star} u \not\equiv 0$ на I_{r_1}, так как $F \overset{\alpha}{\star} u \in V_{r_1}(\mathbb{R})$. Определим теперь функцию $\Psi \in C^\infty_\natural(I_{R+2\varepsilon-r(u)})$ равенством $\Psi = C_1 \Phi \overset{\alpha}{\star} u$, где

$$C_1 = \bigg(\int_0^{R+\varepsilon} \big|\Phi(x)\big| d\mu_\alpha(x)\bigg)^{-1}.$$

Поскольку $\Phi \in V^\infty_{r_1,r_2}(I_{R+2\varepsilon})$, то сужение функции Ψ на I_R принадлежит классу $V^\infty_{r_1,r_2}(I_R)$. Кроме того, совпадение F и Φ на $I_{R+2\varepsilon}$ обеспечивает нетривиальность Ψ на I_{r_1}. Для оценки $\left|L_\alpha^n\Psi(x)\right|$ воспользуемся (6), (38) и леммой 14. Имеем

$$\sup_{x\in I_R}\left|L_\alpha^n\Psi(x)\right| = \sup_{x\in[0,R)}\left|L_\alpha^n\Psi(x)\right| =$$

$$= C_1\sup_{x\in[0,R)}\left|\int_0^\varepsilon T_x^\alpha\Phi(y)L_\alpha^n u(y)\,d\mu_\alpha(y)\right| \le C_1M_n\sup_{x\in[0,R)}\int_0^\varepsilon\left|T_x^\alpha\Phi(y)\right|d\mu_\alpha(y)\le$$

$$\le C_1M_n\sup_{x\in[0,R)}\int_0^{x+\varepsilon}\left|\Phi(y)\right|d\mu_\alpha(y) = M_n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Наконец, полагая $f=\Psi/C_2$, где константа C_2 выбрана из условий

$$C_2>1,\quad C_2>\frac{1}{M_0}\sup_{x\in I_R}\left|\Psi(x)\right|,$$

получаем функцию f, удовлетворяющую условиям второго утверждения теоремы 1. Таким образом, теорема 1 доказана. □

Нетрудно видеть, что первое утверждение теоремы 1 станет, вообще говоря, неверным, если в оценке (7) заменить I_{r_1} на $I_{r_1-\varepsilon}$, $\varepsilon\in(0,r_1)$.

Действительно, пусть $R=(2r_1+\varepsilon)/2$, а f — ненулевая функция класса $C_\natural^\infty(I_R)$, такая что $f=0$ на $(0,r_1-\varepsilon)\cup\big((2r_1-\varepsilon)/2,R\big)$ и

$$\int_0^{r_1} f(x)\,d\mu_\alpha(x)=0.$$

Преобразуем $f\overset{\alpha}{\star}\chi_r$ при $r\in[r_1,R)$, используя (5) и (34). При $0<x<R-r$ имеем

$$\gamma_\alpha x^{2\alpha}\big(f\overset{\alpha}{\star}\chi_r\big)(x)=\int_0^r\int_{|x-y|}^{x+y} ytf(t)k_\alpha(t,x,y)\,dtdy.$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая, что $f=0$ на интервале $(r-x,r+x)$, получаем

$$\gamma_\alpha x^{2\alpha}\big(f\overset{\alpha}{\star}\chi_r\big)(x)=\int_0^{r+x} tf(t)\int_{|x-t|}^{\min\{r,x+t\}} yk_\alpha(t,x,y)\,dydt=$$

$$=\int_0^{r-x} tf(t)\int_{|x-t|}^{x+t} yk_\alpha(t,x,y)\,dydt.$$

Тогда (см. (35), (36))

$$\big(f\overset{\alpha}{\star}\chi_r\big)(x)=\int_0^{r-x} f(t)\,d\mu_\alpha(t)=\int_0^{r_1} f(t)\,d\mu_\alpha(t)=0.$$

Поэтому $f \in V_r(I_R)$ при всех $r \in [r_1, R)$. Свойства функции f показывают, что при замене I_{r_1} на $I_{r_1-\varepsilon}$ в оценке (7) утверждение теоремы 1 (i) может нарушаться.

Доказательство теоремы 2. (i) Используя условие теоремы и лемму 11, получаем разложение (27). Отсюда и из (13) находим

$$L_\alpha^n f(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_{r_1} \cap \mathcal{Z}_{r_2}} c_\lambda (-\lambda^2)^n \varphi_{\lambda,\alpha}(x), \quad x \in I_R, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{39}$$

где $c_\lambda = c_\lambda(f, r_1)$ и ряд в (39) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (см. (25), (20) и (14)).

Пусть $\nu \in \mathcal{Z}_{r_1} \cap \mathcal{Z}_{r_2}$ и $\psi_\nu \in \mathcal{D}_\natural(I_\varepsilon)$ — функция, построенная в лемме 10. Тогда из (39) и (15) имеем

$$\int_0^\varepsilon \big(L_\alpha^n f\big)(x) \psi_\nu(x)\, d\mu_\alpha(x) = (-\nu^2)^n c_\nu.$$

Это соотношение влечёт оценку

$$|c_\nu| \le \mu^{-2n} \sup_{x \in I_\varepsilon} \big|L_\alpha^n f(x)\big| \int_0^\varepsilon \big|\psi_\nu(x)\big|\, d\mu_\alpha(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

которая вместе с условием (10) показывает, что $c_\nu = 0$ при всех $\nu \in \mathcal{Z}_{r_1} \cap \mathcal{Z}_{r_2}$. Следовательно (см. (39)), $f = 0$.

(ii) Из (19), (13) и (14) заключаем, что требуемым условиям удовлетворяет функция $f = \varphi_{\mu,\alpha}$. □

Доказательство теоремы 3. Поскольку $f \in V_{r_1}(I_R)$, то по лемме 7 имеем разложение (21), в котором $r = r_1$ и ряд сходится в $\mathcal{D}'_\natural(I_R)$. Учитывая, что $f \in V_{r_2}(I_R)$, отсюда и из (19) получаем

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_{r_1}} c_\lambda(f, r_1) \varphi_{\lambda,\alpha+1}(r_2) \varphi_{\lambda,\alpha}(x) = 0 \ \text{ в } \ \mathcal{D}'_\natural(I_{r_1+\delta}), \tag{40}$$

где $\delta = R - r_1 - r_2 > 0$.

Далее, для любого $\rho \in (0, \delta)$ рассмотрим функцию $\omega_\rho \in \mathcal{D}_\natural(I_\rho)$, такую что $\omega_\rho \ge 0$ и

$$\int_0^\rho \omega_\rho(x)\, d\mu_\alpha(x) = 1.$$

Семейство ω_ρ сходится в $\mathcal{D}'_\natural(\mathbb{R})$ к дельта-функции δ_0, сосредоточённой в нуле. Сворачивая обе части в (40) с ω_ρ и используя (18), (14), (23), (20) и лемму 3, приходим к равенству

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_{r_1}} c_\lambda(f, r_1) \varphi_{\lambda,\alpha+1}(r_2) \widetilde{\omega}_\rho(\lambda) \varphi_{\lambda,\alpha}(x) = 0, \quad x \in I_{r_1+\delta-\rho},$$

где ряд сходится в $C^\infty(\mathbb{R})$. Поэтому (см. [18, формула (4.23)]),

$$c_\lambda(f,r_1)\varphi_{\lambda,\alpha+1}(r_2)\widetilde{\omega}_\rho(\lambda)=0,\quad \lambda\in\mathcal{Z}_{r_1},\quad \rho\in(0,\delta).$$

Это соотношение и равенство

$$\lim_{\rho\to 0}\widetilde{\omega}_\rho(\lambda)=\widetilde{\delta}_0(\lambda)=1$$

показывают, что

$$c_\lambda(f,r_1)\varphi_{\lambda,\alpha+1}(r_2)=0,\quad \lambda\in\mathcal{Z}_{r_1}.$$

Следовательно, $c_\lambda(f,r_1)=0$ при любом $\lambda\in\mathcal{Z}_{r_1}\setminus\mathcal{Z}_{r_2}$ и

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2}} c_\lambda(f,r_1)\varphi_{\lambda,\alpha}(x)\ \text{ в }\ \mathcal{D}'_\natural(I_R). \tag{41}$$

Пусть теперь g — ненулевая функция класса $\mathcal{D}_\natural(I_\varepsilon)$, такая, что $\widetilde{g}=0$ на множестве $\mathcal{Z}_{r_1}\cap\mathcal{Z}_{r_2}$ (см. лемму 10). Тогда разложение (41) и соотношение (18) влекут равенство

$$f\overset{\alpha}{\star}g=0\ \text{ на }\ I_{R-r(g)}.$$

При этом $f=0$ на $I_{r(g)}$ по условию теоремы. Применяя лемму 6, получаем $f=0$ на I_R, что и требовалось. □

Отметим, что для любых $r>0$, $\varepsilon\in(0,r/2)$ существует ненулевая функция $f\in V^\infty_{r,r+\varepsilon}(I_{2r-\varepsilon})$, равная нулю на $I_{\varepsilon/2}$. В этом легко убедиться, рассмотрев ненулевую функцию $f\in C^\infty_\natural(I_{2r-\varepsilon})$ со следующими условиями: $f=0$ на $(0,\varepsilon/2)\cup(\varepsilon,2r-\varepsilon)$ и

$$\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} f(x)\,d\mu_\alpha(x)=0$$

(см. рассуждение после доказательства теоремы 1 выше). Поэтому требование на R в теореме 3 нельзя существенно ослабить.

Доказательство теоремы 4. Пусть сначала $R=r_1+r_2$. Тогда соотношение (5) и лемма 14 влекут оценку

$$\left|\big(f\overset{\alpha}{\star}\chi_{r_j}\big)(x)\right|\le\int_0^{r_j}\left|T^\alpha_x f(y)\right|d\mu_\alpha(y)\le\int_0^{x+r_j}\left|f(y)\right|d\mu_\alpha(y)\le$$

$$\le\int_0^R\left|f(y)\right|d\mu_\alpha(y),\quad x\in[0,R-r_j],\quad j\in\{1;2\}.$$

Следовательно, $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_j} \in L_{\natural,\alpha}\big([0, R - r_j]\big)$. Положим

$$\mathcal{I}_j = \int_0^{R-r_j} \big(f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_j}\big)(x) d\mu_\alpha(x), \quad j \in \{1; 2\}.$$

Ясно, что $(-1)^{j-1}\mathcal{I}_j \geq 0$ (см. (11)). С другой стороны, используя теорему Фубини и формулу $T_x^\alpha f(y) = T_y^\alpha f(x)$, получаем $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$. Тем самым мы приходим к равенству $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = 0$, которое вместе с условием (11) показывает, что $f \in V_{r_1,r_2}(I_R)$.

В случае $R > r_1 + r_2$ из (11) имеем $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_1} \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_2} \geq 0$ и $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_2} \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_1} \leq 0$ на $I_{R-r_1-r_2}$. Поэтому $f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_1} \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_2} = 0$ на $I_{R-r_1-r_2}$. Кроме того, по доказанному выше

$$f \overset{\alpha}{\star} \chi_{r_j} = 0 \ \text{ на } \ I_{r_1+r_2-r_j}, \quad j \in \{1; 2\}.$$

Отсюда и из леммы 6 заключаем, что $f \in V_{r_1,r_2}(I_R)$. Для завершения доказательства осталось применить теорему B. □

§ 5. Некоторые приложения

Результаты, полученные выше, позволяют установить новые теоремы единственности для решения задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и теоремы о замыкании обобщенных сдвигов. Приведем два таких утверждения, демонстрирующих применение теорем 3 и 4.

Теорема 5. *Пусть $\alpha > -1/2$, $f \in C_\natural^2(\mathbb{R})$, U — классическое решение задачи Коши*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{(2\alpha+3)}{t}\frac{\partial U}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$U(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \geq 0.$$

Предположим, что $r_1, r_2 \in (0, +\infty)$, $r_1/r_2 \notin E_\alpha$, $R \geq r_1 + r_2$, причём

$$U(x, r_1) \geq 0 \ \text{ при } \ x \in (0, R - r_1) \ \text{ и } \ U(x, r_2) \leq 0 \ \text{ при } \ x \in (0, R - r_2). \quad (42)$$

Тогда $U = 0$ на треугольнике $T = \{0 < x < R, 0 < t < R - x\}$.

Доказательство. Как известно (см. [4, гл. 4, §§ 4.4, 4.5]),

$$U(x,t) = 2(\alpha+1)\int_0^1 T_x^\alpha f(ty)\, d\mu_\alpha(y) =$$

$$= \frac{2(\alpha+1)}{t^{2(\alpha+1)}}\int_0^t \big(T_x^\alpha f\big)(y)\, d\mu_\alpha(y) = \frac{2(\alpha+1)}{t^{2(\alpha+1)}}\big(f \overset{\alpha}{\star} \chi_t\big)(x). \quad (43)$$

Это представление показывает, что условия (42) и (11) эквивалентны. Отсюда, используя теорему 4, получаем требуемое утверждение. □

Отметим, что если $\max\{r_1, r_2\} < R < r_1 + r_2$ или $r_1/r_2 \in E_\alpha$, то существует функция $f \in C_\natural^\infty(\mathbb{R})$, такая что $f\big|_{I_R} \in V_{r_1,r_2}(I_R)$ и $f\big|_{I_R} \not\equiv 0$ (см. доказательство теоремы B (ii) в [18]). Отсюда и из формулы (43) видно, что в этом случае утверждение теоремы 5 является неверным.

Пусть $\mathrm{cl}_X\, M$ — замыкание множества M в топологическом векторном пространстве X, $\mathcal{L}in E$ — линейная оболочка заданного множества $E \subset X$.

Теорема 6. *Пусть* $r_1, r_2 \in (0, +\infty)$, $r_1 \neq r_2$ *и* $f \in V_{r_1,r_2}(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{cl}_{C(\mathbb{R})}\, \mathcal{L}in\{T_x^\alpha f : 0 \leq x < \varepsilon\} = \mathrm{cl}_{C(\mathbb{R})}\, \mathcal{L}in\{T_x^\alpha f : 0 \leq x < +\infty\}. \tag{44}$$

Доказательство. Положим

$$U = \mathrm{cl}_{C(\mathbb{R})}\, \mathcal{L}in\{T_x^\alpha f : 0 \leq x < \varepsilon\},$$

$$V = \mathrm{cl}_{C(\mathbb{R})}\, \mathcal{L}in\{T_x^\alpha f : 0 \leq x < +\infty\}.$$

Пусть A — линейный непрерывный функционал на V, равный нулю на U. В силу теоремы Хана-Банаха для доказательства (44) нужно установить, что $A = 0$. По теореме Рисса-Маркова об описании пространства, сопряженного к $C(\mathbb{R})$, функционал A является чётной комплексной мерой Радона на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Тогда условие $A\big|_U = 0$ и формула (4) влекут соотношение

$$f \overset{\alpha}{\star} A = 0 \ \text{ на } \ I_\varepsilon.$$

С другой стороны, из условия $f \in V_{r_1,r_2}(\mathbb{R})$ следует, что $f \overset{\alpha}{\star} A \in V_{r_1,r_2}(\mathbb{R})$. Теперь применяя к функции $f \overset{\alpha}{\star} A$ теорему 3, получаем $f \overset{\alpha}{\star} A = 0$ на $\mathbb{R}$. Значит, $A = 0$ на V. □

Утверждения такого типа для обычных сдвигов восходят к Ж. Кахану [23, § 11, п. 3]. Они связаны с задачей о возможной длине "люка" (интервала нулей) у ненулевых функций из заданного подпространства, инвариантного относительно сдвигов.

В заключение отметим, что другие подобные версии теорем 5, 6 можно получить, как и выше, с помощью теорем 1, 2 и леммы 6.

§ 6. Благодарности

Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации
(тема № 124012400352-6).

Список литературы

1. *Ekincioğlu I., Guliyev V. S., Shishkina E. L.* Fractional weighted spherical mean and maximal inequality for the weighted spherical mean and its application to singular PDE // *J. Math. Sci.* 2022. V. 266, P. 744–764.

2. *Trimèche K. Generalized Wavelets and Hypergroups.* Amsterdam: Gordon and Beach Sci. Publ., 1997.

3. *Berezansky Yu. M., Kalyuzhny A. A. Harmonic Analysis in Hypercomplex Systems.* Dordrecht: Springer, 1998.

4. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференцирацьных уравнений с операторами Бесселя.* Москва: Физматлит, 2019.

5. *Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations.* Dordrecht: Kluwer, 2003.

6. *Selmi B., Nessibi M. M.* A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup // *J. Math. Anal. Appl.* 2007. V. 329, № 1, P. 163–190.

7. *Delsarte J.* Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B.* 1958, V. 246, P. 1358–1360.

8. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1972. V. 47, P. 237–254.

9. *Smith J. D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1972. V. 72, P. 403–416.

10. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations.* / Dordrecht: Kluwer. 1992. V. 365, P. 185–194.

11. *Zalcman L.* Supplementary Bibliography to "A Bibliographic Survey of the Pompeiu problem" // *Radon Transform and Tomography.* / Dordrecht: Kluwer. 2001. V. 278, P. 69–74.

12. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свёртках // *Современные проблемы матемематики. Фундаментальные направления* / Москва: ВИНИТИ. 1989. Т. 54, С. 5–111.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86

13. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.* London: Springer, 2009.

14. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.* Basel: Birkhäuser, 2013.

15. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on symmetric spaces // *Comment. Math. Helv.* 1980. V. 55, P. 593–621.

16. *Peyerimhoff N., Samiou E.* Spherical spectral synthesis and two-radius theorems on Damek-Ricci spaces // *Ark. Mat.* 2010. V. 48, P. 131–147.

17. *Berenstein C. A., Gay R.* A local version of the two-circles theorem // *Israel J. Math.* 1986. V. 55, P. 267–288.

18. *Волчков Вит. В., Краснощеких Г. В.* Уточнение теоремы о двух радиусах на гипергруппе Бесселя-Кингмана // *Матем. заметки.* 2024. Т. 116, № 2, С. 212–228.

19. *Бадалян Г. В. Квазистепенной ряд и квзианалитические классы функций.* Москва: Наука, 1990.

20. *Levin B. Ya.* Lectures on Entire Functions // *Translations of Mathematical Monographs.* 1996. V. 150, P. 248.

21. *Горный А.* Квази-аналитические функции //*УМН.* 1938. № 5, С. 171–186.

22. *Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.* Москва: Наука, 1973, 1974.

23. *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // *Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ».* 1974. Т. 12, С. 199–412.

References

1. *Ekincioğlu I., Guliyev V. S., Shishkina E. L.* Fractional weighted spherical mean and maximal inequality for the weighted spherical mean and its application to singular PDE // *J. Math. Sci.* 2022. V. 266, P. 744–764.

2. *Trimèche K. Generalized Wavelets and Hypergroups.* Amsterdam: Gordon and Beach Sci. Publ., 1997.

3. *Berezansky Yu. M., Kalyuzhny A. A. Harmonic Analysis in Hypercomplex Systems.* Dordrecht: Springer, 1998.

4. *Shishkina E. L, Sitnik S. M. The Method of Transformation Operators for Differential Equations with Bessel Operators.* Moscow: Fizmatlit, 2019.

5. *Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations.* Dordrecht: Kluwer, 2003.

6. *Selmi B., Nessibi M. M.* A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup //*J. Math. Anal. Appl.* 2007. V. 329, № 1, P. 163–190.

7. *Delsarte J.* Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B.* 1958, V. 246, P. 1358–1360.

8. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1972. V. 47, P. 237–254.

9. *Smith J. D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1972. V. 72, P. 403–416.

10. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations.* / Dordrecht: Kluwer. 1992. V. 365, P. 185–194.

11. *Zalcman L.* Supplementary Bibliography to "A Bibliographic Survey of the Pompeiu problem" //*Radon Transform and Tomography.* / Dordrecht: Kluwer. 2001. V. 278, P. 69–74.

12. *Berenstein C. A., Struppa D. C.* Complex analysis and convolution equations // *Several complex variables.* V*: Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics.*1993. V. 54, P. 1–108.

13. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetri c Spaces and the Heisenberg Group.* London: Springer, 2009.

14. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.* Basel: Birkhäuser, 2013.

15. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on symmetric spaces // *Comment. Math. Helv.* 1980. V. 55, P. 593–621.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86

16. *Peyerimhoff N., Samiou E.* Spherical spectral synthesis and two-radius theorems on Damek-Ricci spaces // *Ark. Mat.* 2010. V. 48, P. 131–147.

17. *Berenstein C. A., Gay R.* A local version of the two-circles theorem // *Israel J. Math.* 1986. V. 55, P. 267–288.

18. *Volchkov Vit. V., Krasnoschekikh G. V.* A refinement of the two-radius theorem on the Bessel-Kingman hypergroup // *Math. Notes.* 2024. V. 116, P. 223–237.

19. *Badalyan G. V. Quasi-series and Quasi-analytic Classes of Functions.* Moscow: Nauka, 1990.

20. *Levin B. Ya.* Lectures on Entire Functions // *Translations of Mathematical Monographs.* 1996. V. 150, P. 248.

21. *Gornyi A.* Quasi-analytical functions // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1938. № 5, P. 171–186.

22. *Bateman H. Higher Transcendental Functions. V. 2.* McGraw-Hill Book Company, 1953.

23. *Nikol'skii N. K.* Invariant subspaces in the theory of operators and theory of functions // *J. Math. Sci.* 1976. V. 5, P. 129–249.

Информация об авторах

Глеб Витальевич Краснощёких, Аспирант

Виталий Владимирович Волчков, Доктор физико-математических наук, профессор
SPIN 4478-1677 AuthorID: 505219
Scopus Author ID 7006247848
WoS Research ID: AAQ-7888-2021

Author Information

Gleb V. Krasnoschekikh, graduate student

Vitaliy V. Volchkov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor
SPIN 4478-1677 AuthorID: 505219
Scopus Author ID 7006247848
WoS Research ID: AAQ-7888-2021

Статья поступила в редакцию 05.09.2024;

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86

одобрена после рецензирования 10.02.2025; принята к публикации 11.06.2025

The article was submitted 05.09.2024;
approved after reviewing 10.02.2025; accepted for publication 11.06.2025

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 62-86
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 62-86